

La Continuité

On a vu que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dépend pas de la valeur de $f(x_0)$, mais les valeurs de f **autour de x_0** .

Mais, malgré tout, si f est défini en x_0 , on a très souvent $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

↪ 'la fonction est prévisible' en x_0

Def Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

f est **continue** en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sinon, on dit que f est **discontinue en x_0** .

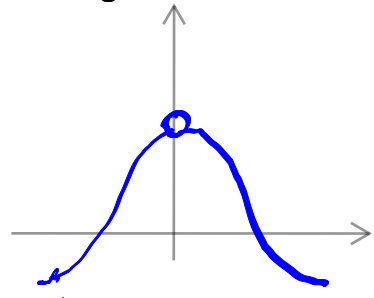
Pour que $f(x)$ soit continue en x_0 , il y a 3 exigences:

① $f(x_0)$ existe

② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe (= à L)

③ $f(x_0) = L$

Il y a plusieurs manières d'être



discontinue:
 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en $x_0 = 0$

$f(x_0)$ n'existe pas

'Type trou'

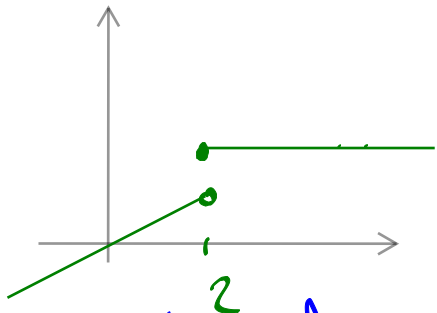
$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 5 \\ 6 & \text{sinon} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

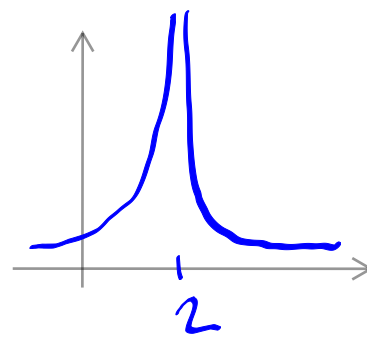
'Type trou-saut'

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$



$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas 'Type saut'



$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Une limite diverge vers l'infini.

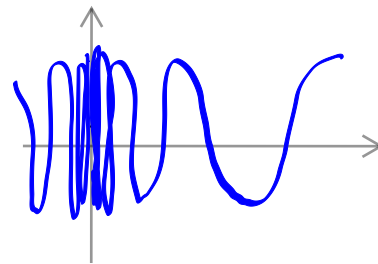
'Type infini'

et d'autre encore...

Exemple.

$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas



Où :

$f(x)$ continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Fonction continues

Soit I un intervalle ouvert.

Une fonction f est continue sur I .
si f est continue en x_0 , $\forall x_0 \in I$

On écrit $f \in C^0(I)$
 $\uparrow$
l'ensemble des fcts
continues sur I .

Intuition: Une fonction est continue
sur I si on peut tracer son graphe
'sans lever le stylo'

Exemples • Montrons que $f(x) = \sqrt{x}$
est continue sur $I =]0; +\infty[$

Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| < \varepsilon; \quad \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < (\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \cdot \varepsilon$$

$\forall$ comme $\sqrt{x} > 0$
 $\sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$

Donc

$$|x - x_0| < \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < (\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \cdot \varepsilon$$

Donc $\delta = \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$ fonctionne

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < (\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \cdot \varepsilon \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

• Montrons que $f(x) = \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$$

$$|2 \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)| \leq 2 \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \quad \left| \cos(x) \right| \leq 1$$

$$\leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0| \quad |\sin(x)| \leq |x|$$

$$\leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$

Pour $\delta = \varepsilon$ fonctionnelle :

$$|x-x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Prop Soient f et g continues sur I . Alors les fonctions suivantes sont aussi continues sur I :

• λf pour $\lambda \in \mathbb{R}$

• $f+g$, $f \cdot g$ et $f-g$

Prop $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$

• $\tan(x)$ est continue sur $D_{\tan(x)}$
domaine de définition

Thm Soient f et g deux fonctions
tel que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
- g est continue en L

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(L)$$

On 'passe la limite à l'intérieur'

Rem On retrouve que g est
continue en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = g(x_0)$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 + \sin(x)} =$$

Car $\sqrt{x}$ est
continue
 $\forall x > 0$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sin(x))} = \sqrt{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

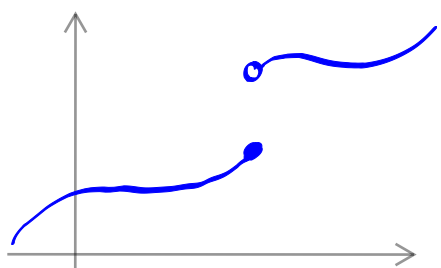
Corollaire Si f est continue en x_0
et g est continue en $f(x_0)$, alors
 $g \circ f$ est continue en x_0 .

Preuve

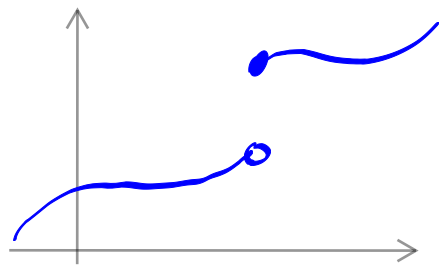
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \\ &= g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)) \\ &= g \circ f(x_0) \quad \square \end{aligned}$$

Def Soit f une fonction.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, f est continue à droite
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, f est continue à gauche



continue à gauche



continue à droite

Exemple

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \\ 2x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$x_0 = 2$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2+x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)\sqrt{2+x}+2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{2+x}+2}$$

$$= \frac{1}{4} = f(2)$$

$f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 - 4 = 4$$

$\Rightarrow$ Donc f est continue à droite en 2, mais pas à gauche!

Prolongement par continuité

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe mais $x_0 \notin D_f$

(Type Trou) $\nearrow$

on peut prolonger f par continuité

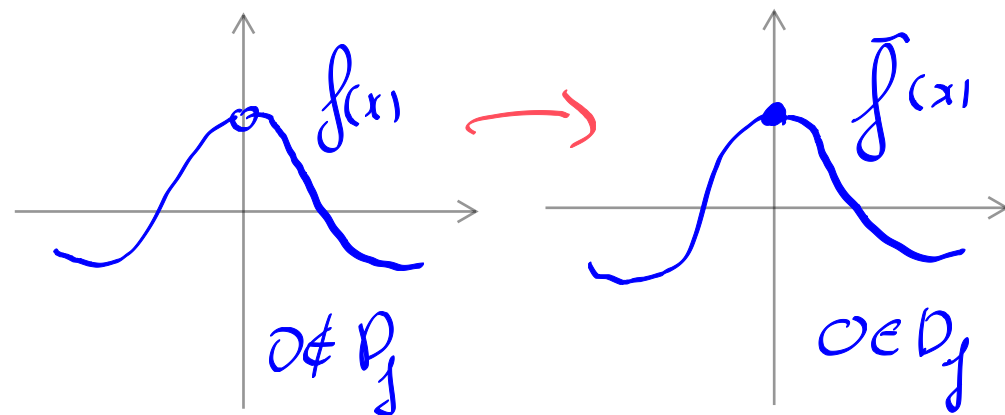
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Rem $\tilde{f}(x)$ est continue en x_0 .

Exemple

• $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, mais $f(0)$ n'existe pas



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$